**به نام او**

**پاسخنامه تمرینات سری پنجم – فصل ششم و هفتم**

1. طبق فرمول تصویر عمود:

می‌دانیم همان برداری است که در است. پس به دنبال بردار عمود بر هستیم:

+

2. ابتدا باید دقت کنیم که ماتریس در حالت کاهش‌یافته سطری است:

**الف)** می‌دانیم که فضای پوچ همان جواب‌های است و چون ماتریس کاهش‌یافته سطری است داریم:

که عبارت بالا پایه‌ی فضای پوچ است. چون اندازه این بردار ۱ نیست و برابر است پس نیست و باید آن را تبدیل کنیم:

**ب)** می‌دانیم ماتریس برابر ۱ است و طبق فرمول زیر داریم:

و متوجه می‌شویم که ماتریس برابر ۲ است.

روش دوم: می‌توانیم بگوییم چون ماتریس در فرم کاهش‌یافته است، پس تعداد سطرهای غیرصفر آن همان آن است که باز هم برابر ۲ می‌باشد.

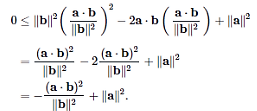
**ج)** طبق قاعده فضای سطری، سطرهای غیرصفر در فرم کاهش‌یافته ماتریس، پایه‌های فضای سطری A هستند:

چون ضرب داخلی این دو بردار صفر است، پس می‌دانیم هستند. پس کافی است آن‌ها را بر اندازه‌شان تقسیم کنیم تا orthonormal شوند:

3. **الف)** فرض کنید متغیر است و اندازه بردار برابر زیر می‌باشد:



حال اگر مقدار را برابر قرار دهیم خواهیم داشت:



که نتیجه می‌دهد که 

**ب)** چون و عمود هستند داریم:

چون اندازه برابر ۴ است داریم:

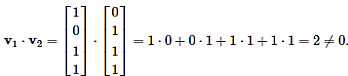
در نهایت شرط آخر به این صورت است:

آنگاه ضرب داخلی و را محاسبه می کنیم:

با حل معادله‌ی بالا به مقدار زیر برای می‌رسیم:

4. فرض کنید ,

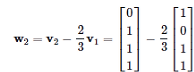
دقت کنید که این دو پایه متعامد نیستند چرا که حاصلضرب داخلی آن‌ها مخالف صفر می‌باشد:



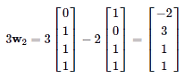
ابتدا با توجه به فرآیند یک پایه متعامد برای می‌یابیم. فرض کنید و  ، مقدار را طوری می‌یابیم که



که نتیجه میدهد که و در نتیجه:



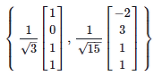
حال برای از بین بردن کسرها به جای  از استفاده می‌کنیم. (توجه کنید که با این کار تعامد بردارها از بین نمی‌رود)



در نتیجه مجموعه یک پایه متعامد برای می‌باشد؛ اما اندازه بردار های آن برابر یک نیست. برای یکه کردن آن‌ها کافی است هر یک را بر اندازه خود بردار تقسیم کنیم:



و در نتیجه به پایه متعامد یکه زیر خواهیم رسید:



5. معادله کلی خط به صورت می‌باشد. حال اگر سه نقطه داده شده بخواهند بر روی یک خط قرار بگیرند، سه معادله زیر باید برقرار شوند:



اما به وضوح مشخص است که سه نقطه داده شده بر روی یک خط قرار نمی‌گیرند. پس بجای آن اقدام به یافتن جواب می‌کنیم.

حال معادلات فوق را به صورت ماتریس نوشته و تلاش می‌کنیم که معادله را حل کنیم:



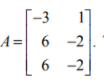
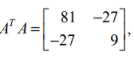
حال برای یافتن جواب برای به صورت زیر عمل می‌کنیم:





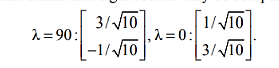


در نتیجه برابر و معادله خط مورد نظر برابر خواهد بود.

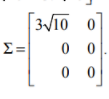


6. فرض کنید آنگاه در این صورت معادله‌ی مشخصه

https://lh5.googleusercontent.com/wCuuzumdMEsSyStokbY76j-n-czBXdz9vWTJEWqlKcpZT26Eejp90rRomTrhYzMSZeM6Li3YKfMAk5vuy-t8dHEs_VxschhrYCss1au7pxV8yVFmppkqfewmfQL24YddJfIFQg6wبرابر با خواهد بود. داریم های به ترتیب نزولی برابر با 90 و



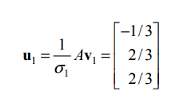
صفر و بردار های متناظرشان برابر با هستند.

https://lh5.googleusercontent.com/Pc55IXiNSCrqo57KLSOFQvlKz6_QLckhlcL2pLhqfSSu4CxEnBcrGg7MOpSFUtuYs6R6xe84-VNsZwvSm4I9IHaWDYncTW0Vr3SU5OP9HCu8ypxESKUXeoYxh-svZtnEMoDfHus0بنابراین یک انتخاب برای برابر با است. دراین صورت خواهیم داشت

https://lh6.googleusercontent.com/YikTjLiQrJ5s8GNazJqsZdEoJ0-apnlNHu_Szevmj7V48k9dPFHAsYcA10xTXTPQbNErHVsnsuzmT5SxwQNdqwzArc2pAABoNPBezEGXrIlGRrwhbmGDbZV8vhfjJD-ubMsDibF_https://lh3.googleusercontent.com/9iiC3xzckxHmFGI5pcWKlO6mAeqAUCKnzGb9KIlFD2QFWSDpwp-XSC4noLHWhxqs-lEeVk-srVOiZwfGdXmNRSI18oJE9joxFU_oVTV_WoH27f7Aj1K5x_2f0dCGIYT3Xrz_0jia

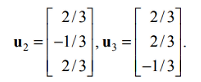
های برابر با و خواهند بود و

 سپس به محاسبه می‌پردازیم:

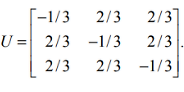


https://lh4.googleusercontent.com/fLxauymOLc33VuXbYIQQGAe-kmfDV80nhGnKPTllMC5tmPv02LlLmYZK-WjKotnuFTOYKe_FQ1yKxPu_FOmo3HyguREYRUO9fSOLknD7aGapzj9ZS0T6cdwqGyY9iHULM1HCjwNwhttps://lh4.googleusercontent.com/3_SXwAtjrsJbEMpB0hft9lGauBm0dh4PTeWND4e_vxDftMMgWwx0s7O-C6B9iQLdeBpAWV3A-BuTvNH1hOpTZzGSgz4YZV3UBkRLFeJDrIvuAHVoOnl9A75RywkKYg9fZv5gCedHاز آنجایی که تنها ستونی که برای تا الان می‌توان یافت است. بقیه ستون‌های را باید از طریق گسترش{} به یک در بدست آوریم. در این صورت ما به دو بردار متعامد پایه و نیاز داریم که بر عمودند. همچنین هر بردار باید در معادله صدق کند. این معادله هم ارز با معادله می‌باشد.

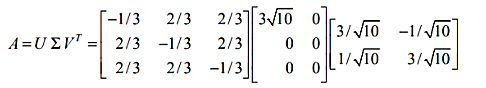
پایه مورد نظر:



بنابر این:

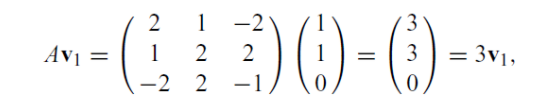


و داریم:

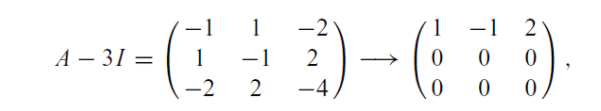


7. اگر یک ماتریس باشد آنگاه که یک ماتریس بوده و یک ماتریس است. درایه‌های قطری ماتریس مثبت‌اند زیرا آنها های یک ماتریس هستند. از آنجایی که یک ماتریس است، می‌توان گفت و ماتریس مربعی وارون پذیر است. همچنین داریم بنابراین یک ماتریس است. بنابراین ویژگی‌هایی دارد که آن را می‌کند.

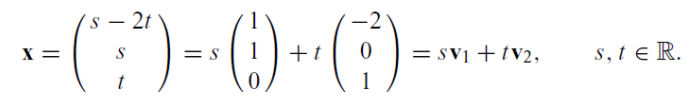
9. برای اینکه نشان دهیم یک مقدار ویژه برای است باید را محاسبه کنیم:



بنابراین یک بردار ویژه برای مقدار ویژه است. برای بردارهای ویژه داریم:



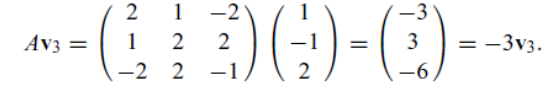
که جواب‌های آن:



پس یک پایه برای برابر است با .

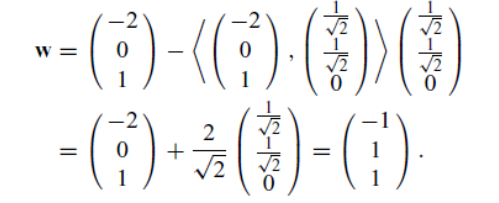
برای اینکه ماتریس را کنیم باید این پایه را به یک پایه برای تبدیل کنیم. پس لازم است یک مقدار ویژه دیگر و بردار ویژه متناظرش را بیابیم. برای اینکار می‌توان از معادله مشخصه کمک گرفت و سپس بردار ویژه متناظر را پیدا کرد.

روش دیگر این است که می‌دانیم برای برابر یک صفحه در است. و می‌توان از فرم کاهش‌یافته ردیفی نتیجه گرفت که عمود بر این صفحه بردار خواهد بود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که این سومین مقدار ویژه ما خواهد بود. سپس می‌توان بردار ویژه متناظر با آن را یافت:

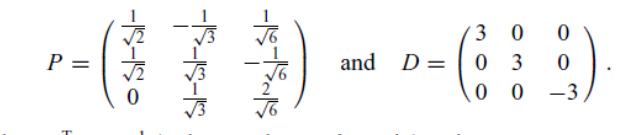


https://lh3.googleusercontent.com/QqfdidtL2srA4wLpiTnlKs_sf5m8G8N6AKIWvbYgwusy6lknHB0oKJfVlKY1Vc7WbJ8m9u7x2aBxoHWMICycW-_GJjf8nbP3Qjj3saBT1wg8iRl0TDtEL5gJ52nykhM7GnKipZ2zبنابراین

https://lh6.googleusercontent.com/fxsCQSgn6zKcaRDsRiVAE-YSOBRadVzCKJ5Te0eXYYtfNuUr3HX1LKWElJchJv9yh8Emfy0YR9zWeqPWEgd1d1FkdIGpivjvimIK_4Gu_oP3yt8UZ6qHTOA29UuA5C9vflzBHndSهمچنان نیاز است تا یک پایه برای مقدار ویژه ۳ پیدا کنیم. با استفاده از عملیات داریم:



بنابراین می‌توان مشاهده کرد که بر دو بردار قبلی عمود است.  با تبدیل به بردارهای واحد داریم:



پس به نحوی که ماتریس است و

https://lh4.googleusercontent.com/e4btdQf-rR3i2ua4u64jNDWMp319KuycqtzeSuXNMz6PlcqQw5kI5BiC26SC19FvmoX1uBzEQR13St8T-V5mCE3MsASj-3BdpCXuw0n6biAtjnPBLH-0YzDT8a6ZAw6pH0ju5SDD

10. الف) ماتریس متناظر با فرم مربعی به صورت زیر است:

در این ماتریس داریم:

اگر مثبت معین باشد، باید هر دو عبارت بالا مثبت باشد و اگر منفی معین باشد، باید عبارت اول منفی و عبارت دوم مثبت باشد. پس چون حالت بالا هیچ یک از حالات گفته شده نیست و دترمینان ماتریس مخالف صفر است، پس فرم مربعی گفته شده نامعین است.

ب) ماتریس متناظر با فرم مربعی به صورت زیر است:

در این ماتریس داریم:

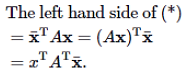
که طبق متن بالا این فرم مربعی منفی معین است.

11. الف) فرض کنید مقدار ویژه ای از و بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه باشد. پس داریم

. که با ضرب کردن از سمت چپ در دو طرف عبارت داریم که :

(\*) 

توجه کنید که سمت چپ عبارت حاصلضرب داخلی بردار های و می‌باشد و چون حاصلضرب داخلی دارای ویژگی جابجایی می‌باشد داریم:

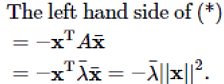


حال از آنجایی که ماتریس یک ماتریس پادمتقارن می‌باشد و ، با جایگذاری این دو در تساوی بالا داریم :



حال با مزدوج گرفتن از و با توجه به حقیقی بودن داریم =

درنتیجه :



حال با در نظر گرفتن سمت چپ ستاره و تساوی بدست آمده در بالا داریم:



از آنجایی که بردار ویژه می‌باشد، پس با توجه به تعریف مخالف صفر است. پس:



و این نشان می‌دهد که یا برابر صفر یا مطلقا موهومی می‌باشد . ( چرا که اگر آنگاه داریم پس )

ب ) با توجه به قسمت الف، می‌دانیم که مقادیر ویژه برابر صفر یا یک عدد مطلقا مختلط هستند .در نتیجه اگر یک مقدار ویژه مطلقا مختلط باشد , انگاه مزدوج آن = نیز با توجه به حقیقی بودن ماتریس مقدار ویژه‌ای برای آن می‌باشد .

در نتیجه مقادیر ویژه مخالف صفر به صورت جفت‌های و می‌باشند .

فرض کنید مقادیر ویژه غیرصفر ماتریس A می‌باشند .

حال از آنجایی که یک ماتریس پادمتقارن حقیقی نرمال می‌باشد، قابل قطری‌سازی (به وسیله ماتریس واحد) است . پس ماتریس معکوس پذیر وجود دارد به طوری که :



که نشان‌دهنده ماتریسی است که درایه های روی قطر آن برابر می‌باشد و بقیه درایه های آن برابر صفر است.

حال چون ماتریس وارون پذیر است، ماتریس برابر ماتریس قطری در سمت راست می‌باشد که به سادگی قابل مشاهده است که به صورت می‌باشد. پس ماتریس به صورت است. پس ثابت کردیم که ماتریس پادمتقارن زوج می‌باشد.

12. ماتریس یک ماتریس متقارن می‌باشد؛ چرا که (BTB)T = BT(BT)T = BTB . برای این که نشان دهیم این ماتریس مثبت معین است، باید اثبات کنیم که به ازای هر بردار X کهRn X داریم XTBTBX ≥ 0 و XTBTBX = 0 فقط و فقط اگر x = 0 .

به ازای هر Rn X داریم که :



که به ازای هر BX ≠ 0 دارای مقداری مثبت می‌باشد و اگر و فقط اگر BX = 0 .

حال چون rank(B) = k می‌باشد، فرم پلکانی کاهش یافته در هر ستون دارای یک درایه پیشرو خواهد بود و در نتیجه تنها جواب معادله BX = 0 برابر X = 0 می‌باشد. پس به ازای هرRn X داریم که XTBTBX ≥ 0 و XTBTBX = 0 فقط و فقط اگر x = 0 در نتیجه ماتریس BTB یک ماتریس مثبت معین می‌باشد .

اگرماتریس n × n متقارن A مثبت معین باشد، آنگاه همه‌ی مقادیر ویژه آن مثبت خواهند بود. پس صفر مقدار ویژه A نخواهد بود و در نتیجه دستگاه معادلات AX = 0 جوابی غیر بدیهی نخواهد داشت پس A وارون پذیر خواهد بود.

موفق باشید

تیم تدریس‌یاری جبرخطی

پاییز 99